**Nom : NAIT MIHOUB Prénom : Ayoub Matricule : 191931047451 Groupe : 2**

**Partie 1 : Les Fonctions Primitives Récursives**

**1)** Une fonction PR est soit une fonction de base ou une fonction construite à

partir d'autres fonctions PR au moyens de règles de composition ou de recursion.

**2)** Faux, car il n'existe aucun algorithme primitif récursif définissant la fonction

d'Ackermann.

**3)** Vrai, la famille des fonctions PR est incluse dans la famille des fonctions

recursive car elle vérifie toutes conditions de fonction R.

**4)** Faux, la fonction Zéro d'arité 0 est une fonction de base.

**5)** R1 ET R2 deux relations binaires primitives récursives => Car(R1) est PR

et Car(R2) est PR.

Montrons que (R1 U R2) est PR:

-(R1 U R2) est PR si Car(R1 U R2) est PR.

{ 1 si x ∈ (R1 U R2)

Car(R1 U R2)(x)= {

{ 0 si x ∉ (R1 U R2)

{ 1 si x ∈ R1 ou x ∈ R2

= {

{ 0 si x ∉ R1 ou x ∉ R2

{ 1 si Car(R1)(x)=1 ou Car(R2)(x)=1

= {

{ 0 si Car(R1)(x)=0 ou Car(R2)(x)=0

{ 1 si Car(R1)(x) + Car(R2)(x) > 1

= {

{ 0 si Car(R1)(x) + Car(R2)(x) = 0

=Sg( Plus( Car(R1)(x) , Car(R2)(x) ) )

=Sg o Plus o ( Car(R1) , Car(R2) ) (x)

C'est une composition de fonctions déja prouveés primitives recursives

( Sg , Plus , Car(R1) , Car(R2) ) => Car(R1 U R2) est PR d'où (R1 U R2) est PR.

**6)** R1 est PR => Car(R1) est PR.

- Montrons que ⌉R1 est PR:

{ 1 si x ∈ ⌉R1

Car(⌉R1)(x)= {

{ 0 si x ∉ ⌉R1

{ 1 si x ∉ R1

Car(⌉R1)(x)= {

{ 0 si x ∈ R1

{ 1 si Car(R1)(x) = 0

Car(⌉R1)(x)= {

{ 0 si Car(R1)(x) = 1

\_\_

= Sg o Car(R1)(x)

\_\_

- C'est une composition de deux fonctions déja prouvées PR ( Sg et Car(R1) )

=> Car(⌉R1) est PR d'où ⌉R1 est PR.

**7)** Montrons que la relation (x≠y) est PR:

(inég: inégalité)

{ 1 si x≠y

Car(inég)(x,y)= {

{ 0 si x=y

{ 1 si x-y≠0

= {

{ 0 si x-y=0

{ 1 si |x-y|≠0

= {

{ 0 si |x-y|=0

{ 1 si Abs(x-y)≠0

= {

{ 0 si Abs(x-y)=0

= Sg o Abs(x,y)

C'est une composition de deux fonctions déja prouvées PR ( Sg et Abs )

Donc : Car(inég) est PR d'où la relation (x≠y) est PR.

**8)** prouvons que quotion(x,y) est PR

{ 0 si x=0

quot(x,y)= {

{ y div x sinon

quot(x,0)= 0 = Z1(x)

{ 0 si x=0

quot(x,y+1)= {quot(x,y) + 1 si y+1 = (quot(x,y)+1)\*x

{ y div x sinon

\_\_

= Sg(x)\*[ quot(x,y) + Sg (moins(mult(S(quot(x,y)), x), S(y))) ]

\_\_

= [ mult o (Sg o P31, Plus o (P32, Sg o moins o (mult o (S o P32, P31), S o P33))) ] (x,quot(x,y),y)

C'est une composition de fonctions déja prouvées PR

Donc : quot(x,y) est PR

prouvons que mod(x,y) est PR:

mod(x,y)= x - [quot(x,y) \* y]

= (-) (x, (X)(quot(x,y), y))

= (-) (P21(x,y), (X)(quot(P21, P22), P22)(x,y))

= (-) o (P21, (X) o (quot o (P21, P22), P22)) (x,y)

Donc : mod(x,y) est PR car c'est une composition de fonctions deja prouvées PR (moins, multip, quot), et de fonction de bases (P21, P22)

**A\_**Derivation de la fonction mod(x,y):

f1 = P21

f2 = P22

f3 = quot

f4 = multip

f5 = moins

f6 = f3 o (f1, f2)

f7 = f4 o (f6, f2)

f8 = f5 o (f1, f7)

donc : la suite de fonction f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8 est une derivation PR de la fonction mod(x,y)

**B\_**Deduire que Mlty(y) est PR:

multy y => mod(x,y)=0.

donc:

{ 1 si mod(x,y)=0

multy= {

{ 0 sinon

{ 1 si mod(x,y)=0

= {

{ 0 sinon

\_\_

= Sg(mod(x,y))

\_\_

= Sg o mod(x,y)

-c'est une composition de fonctions PR déja demontrées donc multy est PR.

**C\_** f(x,y)= (xdivy, xmody).

f est composée de deux fonctions PR demontrées précedemant (xdivy , xmody)

donc f est PR.

**9)** 1/ Montrons que la fonction max(x,y) est PR:

- Règle de composition:

max d'arité 2.

(G1,G2,...,Gm) d'arité 2.

H=m.

tels que: maximum(x,y)= Ho(G1,G2,...,Gm)(x,y)

{ x si x>y

Maximum(x,y)= {

{ y sinon

{ x-y+y si x>y

= {

{ y sinon

{ x-y si x>y { y si x>y

= { + {

{ 0 sinon { y sinon

{ x-y si x>y

= { + y

{ 0 sinon

= moins(x,y) + y

= Plus( moins(x,y) , y )

= Plus( moins(P21,P22) , P22 )(x,y)

= Plus o ( moins o (P21,P22) , P22 )(x,y)

- C'est une composition de fonctions déja prouvées PR (plus, moins) et

de fonctions de bases (P12, P22)

donc : maximum est PR par composition.

2/ maximum(x1, x2, ...,xn) ...g(n) (maximum(n) : maximum(x1, x2, ...,xn))

Montrons par récurrence que la fonction maximum(x1,x2,..,xn) est PR:

- On a déja montrer que maximum(x,y) est PR donc elle est vrai pour n=2.

- supposons que g(n) est PR et montrons que g(n+1) est PR:

maximum(x1,x2,..,xn,x(n+1)) = maximum( maximum(n)(x1,x2,..,xn), x(n+1) )

= maximum( maximum(n)(P(n+1)(1), P(n+1)(2), .., P(n+1)(n)) (x1,x2,..,xn,x(n+1)) , P(n+1)(n+1) (x1,x2,..,xn,x(n+1)) )

= maximum o ( maximum(n) o (P(n+1)(1), P(n+1)(2), .., P(n+1)(n)) ) ( x1, x2,.., xn, x(n+1) )

g(n+1) est une composition de la fonction maximum déja prouvée PR et de fonctions de bases

(P(n+1)(1), P(n+1)(2), .., P(n+1)(n), P(n+1)(n+1)) et de la fonction maximum(n) supposée PR.

Donc : g(n+1) est PR donc g(n) et PR ( g(n) = maximum(x1, x2, ...,xn) ).

**10)** Montrons que f(x) = ∑(i=0)(x) i est PR:

- Par régle de recursion:

(n+1=1 , n=0)

f(0)= Cst

f(y+1)= G(f(y),y)

f(0)= ∑(i=0)(0) i = 0 = Cst

f(y+1) = ∑(i=0)(y+1) i = ∑(i=0)(y) i + (y+1)

= f(y) + S(y) = Plus(f(y), S(y))

= Plus( P21(f(y),y) , S(P22(f(y),y)) )

= Plus o ( P21 , S o P22 ) (f(y),y)

G= Plus o ( P21 , S o P22 ) est PR car c'est une composition de fonction de base (P21 et P22) et

de fonction prouvée PR(S).

donc : f(x) est PR par recursion.